Prosiding Simposium Kebangsaan
Sains Matematik Ke-V (1992) 71-80

SATU KAEDAH SIRI FOURIER UNTUK PENYELESAIAN BERANGKA MASALAH RESAPAN TAK LINEAR

Oleh

BAHROM BIN SANUGI

Jabatan Matematik,
Fakulti Sains,
Universiti Teknologi Malaysia
Skudai, Johor Bahru,
Malaysia.

Abstrak. Dalam kertas ini kami perkenalkan satu kaedah siri Fourier yang menurunkan persamaan pembeza separa tak linear yang muncul dalam masalah resapan kepada satu sistem persamaan pembeza biasa dengan syarat sempadan satu titik. Keputusan berangka yang diperolehi menunjukkan kaedah ini amat berkesan dalam mencapai kejituan yang tinggi disebabkan ketiadaan ralat pendiskretan pada pembolehubah ruang.

I. PENGENALAN

Persamaan pembeza separa peringkat pertama muncul dalam analisis mengenai proses resapan dalam kimia fizik yang membabitkan kadar aliran bahan yang terserap serta cerun kepekatan yang menyebabkan alirannya. Ia juga muncul dalam perumusan aliran haba dalam satu bahan pepejal.

Pada umumnya wujud satu kelas persamaan tak linear berbentuk

$$a\frac{\partial u}{\partial t} + b\frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t) \qquad (1.1)$$

dengan a, b dan f bukan sahaja fungsi bagi x dan t tetapi juga fungsi bagi u. Persamaan seperti ini memang telah lama diselidiki. Sebagai contoh ahli matematik Perancis yang terkenal dalam abad ke-18, iaitu Joseph-Louis Lagrange, telah merumuskan penyelesaiannya.

Penyelesaian am persamaan ini ialah $F(\xi,\eta) = 0$ dengan F suatu fungsi sebarangan bagi dua pembolehubah ξ dan η dan $\xi(x,t,u) = c_1$ dan $\xi(x,t,u) = c_2$ membentuk penyelesaian satu sistem persamaan pembeza biasa serentak yang dinyatakan dengan menyamakan

$$\frac{dx}{a} = \frac{dt}{b} = \frac{du}{f} \tag{1.2}$$

dengan $a \neq 0,\ b \neq 0,\ f \neq 0$

Masalah menyelesaikan persamaan tak linear peringkat pertama yang lebih umum berbentuk

$$f(x,t,u,u_x,u_t) = 0 \tag{1.3}$$

dengan fungsi f tak linear dalam u_x dan u_t adalah lebih sukar lagi. Penyelesaian beranalisis biasanya sukar untuk dilaksanakan. Namun demikian beberapa bentuk tertentu persamaan pembeza separa seperti

$$f(u_x, u_t) = 0 \tag{1.4}$$

$$f(u,u_x,u_t) = 0 \tag{1.5}$$

atau persamaan boleh pisah berbentuk

$$f(x,u_x) = g(t,u_t) \tag{1.6}$$

boleh diselesaikan lebih mudah lagi dengan menggunakan kaedah-kaedah khas dengan menentukan kamiran lengkap atau menentukan u dari persamaan

$$du = u_x dx + u_t dt \tag{1.7}$$

Dalam kertas ini kita akan tumpukan perhatian kita kepada masalah resapan tak linear berbentuk

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = f(x,t) \tag{1.8}$$

dengan ciri-ciri:

1. $f(x,t)$ dapat dinyatakan dalam bentuk

$$f(x,t) = \tfrac{1}{2}p_O(t) + \sum_{r=1}^{N}\left[p_r(t)\text{kos}\left(\frac{2\pi rx}{L}\right) + q_r(t)\sin\left(\frac{2\pi rx}{L}\right)\right] \tag{1.9}$$

   dengan L suatu nombor nyata dan N suatu integer positif serta p_r dan q_r adalah koefisien yang merupakan fungsi bagi t.

2. pada $t = 0$, $u(x,t)$ dapat dinyatakan sebagai

$$u(x,0) = \frac{1}{2}k_o + \sum_{r=1}^{M}\left[k_r\text{kos}\left(\frac{2\pi rx}{L}\right) + m_r\sin\left(\frac{2\pi rx}{L}\right)\right] \tag{1.10}$$

   dengan k_r, m_r adalah pemalar dan M suatu integer positif.

3. $u(x,t)$ adalah berulang dengan tempoh L dalam pembolehubah ruang.

   Syarat terakhir ini memberi implikasi bahawa kita hanya perlu menentukan penyelesaian untuk $0 \le x \le L$, $t > 0$

II. PENURUNAN KEPADA BENTUK PPB

Misalkan wujud penyelesaian kepada persamaan (1.8) berbentuk

$$u(x,t) = \frac{1}{2}f_O(t) + \sum_{r=1}^{\infty}\left[f_r(t)\text{ kos}\left(\frac{2\pi rx}{L}\right) + g_r(t)\sin\left(\frac{2\pi rx}{L}\right)\right] \tag{2.1}$$

Fungsi ini akan memenuhi syarat awal (1.10) jika

$$f_r(0) = \begin{cases} k_r, & r = 0, 1, \ldots\ldots, M \\ 0, & r > M \end{cases}$$

$$g_r(0) = \begin{cases} k_r, & r = 1, 2, \ldots\ldots, M \\ 0, & r > M \end{cases} \qquad (2.2)$$

Dengan membezakan (2.1) terhadap t dan x, kita perolehi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} f_0'(t) + \sum_{r=1}^{\infty} [f_r'(t) \text{ kos } (\frac{2\pi rx}{L}) + g_r'(t) \sin (\frac{2\pi rx}{L})]$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{r=1}^{\infty} [(- \frac{2\pi r}{L}) f_r(t) \sin (\frac{2\pi rx}{L}) + (\frac{2\pi r}{L}) g_r (t)\text{kos } (\frac{2\pi rx}{L})]$$

Katakanlah hasildarab (u) $(\frac{\partial u}{\partial x})$ boleh ditulis dalam bentuk siri Taylor seperti beri

$$(u)\,(u_x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{r=1}^{\infty} \left[a_r \text{ kos } \left(\frac{2\pi rx}{L}\right) + b_r \sin \left(\frac{2\pi rx}{L}\right)\right]$$

dengan a_r dan b_r dikaitkan kepada f_r dan g_r dalam suatu bentuk tertentu. Untuk mendapat perkaitan ini, kita gunakan kaedah pengiraan bersimbol. Mula-mula kita takrifkan pengoperasi yang berikut :

$$c(r) = \text{kos } \left(\frac{2\pi rx}{L}\right)$$

$$s(r) = \sin \left(\frac{2\pi rx}{L}\right)$$

$$f(r) = f_r\,(t)$$

$$g(r) = g_r\,(t)$$

$$z(r) = \frac{2\pi r}{L}$$

Dengan yang demikian u dan u_x dapat ditulis sebagai

$$u = \frac{1}{2} f_o + \sum_{r=1}^{\infty} [f(r)\, c(r) + g\,(r)\, s(r)]$$

$$u_x = \sum_{r=1}^{\infty} [-z(r)\, f(r)\, s(r) + z(r) g(r)\ \ c(r)]$$

Dengan pendarapan kita perolehi

$$(u)(u_x) = \left\{ \frac{1}{2} f_o + \sum_{r=1}^{\infty} \left[f(r)\, c(r) + g(r)\, s(r) \right] \right\}$$

$$\left\{ \sum_{r=1}^{\infty} \left[-z(r)\, f(r)\, s(r) + z(r)\, g(r)\ \ c(r) \right] \right\} \tag{2.3}$$

Pendarapan ini dilakukan dengan menggunakan pakej pengiraan bersimbol REDUCE untuk memberikan bentuk

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{r=1}^{\infty} \left[a_r \operatorname{kos} \left(\frac{2\pi r x}{L} \right) + b_r \sin \left(\frac{2\pi r x}{L} \right) \right]$$

Satu contoh hasil yang diperolehi dengan menggunakan f_r dan g_r untuk r tidak melebihi 4 ialah

$$a_o = 0$$

$$a_1 = \frac{1}{2} \left(f_o g_1 + f_1 g_2 - f_2 g_1 + f_2 g_3 - f_3 g_2 + f_3 g_4 - f_4 g_3 \right)$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \left(2 f_o g_2 + 2 f_1 g_1 + 2 f_1 g_3 + 2 f_2 g_4 - 2 f_3 g_1 - 2 f_3 g_3 \right)$$

$$a_3 = \frac{1}{2} \left(3 f_o g_3 + 3 f_1 g_2 + 3 f_1 g_4 + 3 f_2 g_1 - 3 f_4 g_1 \right)$$

$$a_4 = \frac{1}{2} \left(4 f_o g_4 + 4 f_1 g_3 + 4 f_2 g_2 + 4 f_3 g_1 \right)$$

$$a_5 = \frac{1}{2} \left(5 f_1 g_4 + 5 f_2 g_3 + 5 f_3 g_2 + 5 f_4 g_1 \right)$$

$$\vdots$$

$$b_1 = \frac{1}{2} \left(-f_0 f_1 - f_1 f_2 - f_2 f_3 - f_3 f_4 - g_1 g_2 - g_2 g_3 - g_3 g_4 \right)$$

$$b_2 = \frac{1}{2}(-2f_0f_2 - f_1^2 - 2f_1f_3 - 2f_2f_4 + g_1^2 - 2g_2g_3 - 2g_2g_4)$$

$$b_3 = \frac{1}{2}(-3f_0f_3 - 3f_1f_2 - 3f_1f_3 - 3f_1f_4 + 3g_1g_2 - 3g_1g_4$$

$$b_4 = \frac{1}{2}(-4f_0f_4 - 4f_1f_3 - 2f_2^2 + 4g_1g_3 + 2g_2^2)$$

$$b_5 = \frac{1}{2}\left(-5f_1f_4 - 5f_2f_3 + 5g_1g_4 + 5g_2g_3\right)$$

Dengan menggantikan sebutan-sebutan yang sesuai ke dalam persamaan (1.8) kita perolehi

$$\frac{1}{2}f_0'(t) + \sum_{r=1}^{\infty}\left[f_r'(t)\,\text{kos}\left(\frac{2\pi rx}{L}\right) + g_r'(t)\sin\left(\frac{2\pi rx}{L}\right)\right] + \frac{1}{2}a_0(t)$$

$$+\sum_{r=1}^{\infty}\left[a_r(t)\,\text{kos}\left(\frac{2\pi rx}{L}\right) + b_r(t)\sin\left(\frac{2\pi rx}{L}\right)\right] \tag{2.4}$$

$$= \frac{1}{2}p_0(t) + \sum_{r=1}^{N}\left[p_r(t)\,\text{kos}\left(\frac{2\pi rx}{L}\right) + q_r(t)\sin\left(\frac{2\pi rx}{L}\right)\right]$$

Dengan menyamakan koefisien kita perolehi

$$\frac{1}{2}f_0'(t) + \frac{1}{2}a_0(t) = \frac{1}{2}p_0(t)$$

$$\left.\begin{aligned} f_r'(t) + a_r(t) &= p_r(t)) \\ g_r'(t) + b_r(t) &= q_r(t) \end{aligned}\right\} \quad r = 1,2,.., \gamma = \text{maks}(M,N) \tag{2.5}$$

Tidak seperti strategi yang dikemukakan oleh Forrington [4], sistem ppb ini belum lagi mencukupi untuk mewakili pps yang asal. Ini kerana a_r dan b_r adalah juga fungsi f_i dan g_i untuk $i < r$. Bagi kes $r > 2M$, kuantiti a_r dan b_r perlu mengandungi f_i dan g_i dengan $i < M$ sebagai faktor. Dengan demikian, memandangkan kepada syarat awal adalah kesemuanya sifar untuk $r > M$, maka seperti yang dicadangkan oleh Bahrom [1] dua persamaan tambahan berikut adalah memadai untuk membentuk satu sistem ppb yang mewakili (1.8).

$$\left.\begin{aligned} f_r'(t) + a_r(t) &= 0 \\ g_r'(t) + b_r(t) &= 0 \end{aligned}\right\} \; r = \gamma + 1, \gamma + 2, \ldots, 2M \tag{2.6}$$

Untuk r > 2M persamaan pembezanya adalah berbentuk

$$\left.\begin{aligned} \frac{df_r}{dt} &= 0, \; f_r(0) = 0 \\ \frac{dg_r}{dt} &= 0, \; g_r(0) = 0 \end{aligned}\right\} \; r > 2M$$

yang mempunyai penyelesaian

$$f_r(t) \equiv 0, \; g_r(t) \equiv 0$$

Dengan demikian, pps asal telah dijelma menjadi sebilangan ppb finit (2.5) dan (2.6) dengan syarat awal (2.2).

III SATU CONTOH BERANGKA

Sekarang marilah kita perhatikan penyelesaian masalah

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \text{kos}\,(x + t) + \frac{1}{2}\sin 2\,(x + t) \tag{3.1}$$

dengan syarat awal $u(x,0) = \sin x$. Penyelesaian tepat masalah ini diberi oleh

$$u(x,t) = \sin\,(x + t)$$

Perhatikan dalam contoh ini fungsi di sebelah kanan persamaan (1.8) diberikan oleh

$$\begin{aligned} f(x,t) &= \text{kos}\,(x + t) + \frac{1}{2}\sin 2\,(x + t) \\ &= \text{kos}\,x\,\text{kos}\,t - \sin x \sin t \\ &\quad + \frac{1}{2}(\sin 2x\,\text{kos}\,2t + \text{kos}\,2x \sin 2t \\ &= \sum_{r=1}^{\infty}\left[p_r\,\text{kos}\,rx + q_r \sin rx\right] \end{aligned} \tag{3.2}$$

dengan

$$p_0 = 0$$
$$p_1 = \text{kos } t,$$
$$q_1 = -\sin t,$$
$$p_2 = \frac{1}{2}\sin 2t,$$
$$q_2 = \frac{1}{2}\text{kos } 2t,$$
$$\text{Baki} = 0, N = 2$$

Pada $t = 0$, $u(x,0) = \sin x$. Ini bermakna $k_0 = 0$, $k_1 = 0$, $k_1 = 0$, ... dan $m_1 = 1$, $m_2 = 0$, ..., iaitu $M = 1$. Seterusnya γ = maks $(M,N) = 2$. Dengan demikian set ppb yang mewakili masalah asal diberikan oleh

$$\begin{aligned}
f_0'(t) + a_0 &= p_0(t), & f_0(0) &= 0 \\
f_1'(t) + a_1 &= p_1(t), & f_1(0) &= 0 \\
g_1'(t) + b_1 &= q_1(t), & g_1(0) &= 1 \\
f_2'(t) + a_2 &= p_2(t), & f_2(0) &= 0 \\
g_2'(t) + b_2 &= q_2(t), & g_2(0) &= 0
\end{aligned} \tag{3.3}$$

dengan

$$a_0 = 0$$

$$a_1 = \frac{1}{2}(f_0g_1 + f_1g_2 - f_2g_1)$$

$$a_2 = f_0g_2 + f_1g_1$$

dan

$$b_1 = \frac{1}{2}(-f_0f_1 - f_1f_2 - g_1g_2)$$

$$b_2 = \frac{1}{2}(-2f_0f_1 - f_1^{\,2} + g_1^{\,2})$$

oleh kerana $f_0(t) \equiv 0$ dari persamaan yang pertama, maka sistem ppb itu terturun menjadi

$$\begin{aligned}
y_1' &= \text{kos } t - a_1, & y_1(0) &= 0 \\
y_2' &= \sin t - b_1, & y_2(0) &= 1 \\
y_3' &= \frac{1}{2}\sin 2t - a_2, & y_3(0) &= 0 \\
y_4' &= \frac{1}{2}\text{kos } 2t - b_2, & y_4(0) &= 0
\end{aligned} \tag{3.4}$$

dengan

$$a_1 = \frac{1}{2}(y_1y_4 - y_3y_2)$$

$$a_2 = y_1y_2$$

$$b_1 = \frac{1}{2}(-y_1y_3 - y_2y_4)$$

$$b_2 = \frac{1}{2}(-y_1^2 + y_2^2)$$

dan pembolehubah tak bersandar y_1, y_2, y_3, y_4 digunakan masing-masing untuk menggantikan f_1, g_1, f_2, g_2 . Sistem (3.4) seterusnya diselesaikan dengan menggunakan perisian NAG rutin DO2BBF (Kaedah Runge - Kutta Merson) dalam rantau $0 \le x \le 2\pi$, $0 \le t \le 10$. Ralat pada penyelesaiannya ditunjukkan dalam Jadual 1. Perhatikan ralat ini terletak dalam bendungan angka toleransi kejituan $\epsilon = 10^{-7}$. Ini menunjukkan bahawa ralat ini hanyalah disebabkan oleh pendiskretan pada arah t sahaja dan ianya adalah dalam kawalan kita.

Jadual 1 : Ralat dalam penyelesaian berangka masalah resapan tak linear dengan $dx = 0.5\pi$, $\epsilon = 10^{-7}$

t	x= 0.0	x=0.5π	x = π	x = 1.5π	x=2π
0.0	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
1.0	-0.637E-07	0.368E-07	-0.382E-07	0.650E-07	-0.637E-07
2.0	-0.461E-07	0.109E-07	-0.344E-07	0.696E-07	-0.461E-07
3.0	0.455E-07	-0.657E-07	0.447E-07	-0.245E-07	0.455E-07
4.0	-0.198E-07	0.807E-08	0.731E-08	0.442E-08	-0.198E-07
5.0	-0.677E-07	-0.462E-07	-0.172E-08	0.232E-07	-0.677E-07
6.0	0.372E-07	-0.611E-07	0.965E-07	-0.726E-07	0.372E-07
7.0	0.495E-07	-0.477E-07	0.587E-07	-0.605E-07	0.495E-07
8.0	0.561E-07	0.257E-07	-0.182E-07	-0.131E-07	0.565E-08
9.0	0.514E-07	-0.220E-07	0.448E-07	-0.743E-07	0.514E-07
10.0	0.282E-07	-0.226E-07	0.446E-07	-0.503E-07	0.282E-07

IV KESIMPULAN

Analisis ini telah menjelaskan bagaimana suatu masalah khas resapan dengan ciri penyelesaian berulang pada arah pembolehubah ruang telah dapat diturunkan menjadi satu sistem persamaan pembeza biasa tanpa memasukkan ralat pendiskretan pada arah pemecahan tersebut. Penggunaan kaedah ini untuk menyelesaikan persamaan Burgers ada diberikan dalam Evans dan Sanugi [3]. Pada umumnya kaedah ini akan dapat dijalankan bagi menyelesaikan sebarang masalah tak linear berbentuk lain yang timbul dalam perumusan masalah resapan dengan penyelesaian berulang. Adalah diharapkan satu perisian jalan sendiri yang mengambil kira pemecahan berautomatik akan dapat dibina dan dijalankan untuk mengambil peluang sifat penurunannya yang mudah ini.

RUJUKAN

[1] Bahrom Sanugi, "New Numerical Strategies for Initial Value Type Ordinary Differential Equations," *Thesis Ph.D,* Loughborough University of Technology, 1986.

[2] Bahrom Sanugi, A Fourier Series Method for the Numerical Solution of a Class of Parabolic PDE of the Form $u_t = a(u_x)^2 + bu_{xx} + f(x,t)$, *Laporan Teknik M/LT No. 1,* Jabatan Matematik, UTM, 1987.

[3] Evans, D.J. and Bahrom Sanugi, A Fourier series method for the numerical solution of Burgers equation, *Intern. J. Computer Math.* **27** (1989), 219 - 222.

[4] Forrington, C.V.D., A Fourier series method for the numerical solution of a class of parabolic partial differential equations, *C.A.C.M.* **7** (1964), 179 - 181.